प्रश्नपत्र का प्रारूप

गणित - कक्षा 12

समय : 3 घंटे
पूर्णांक : 100

प्रश्नपत्र के विभिन्न आयामों पर अंक भारण निम्नलिखित अनुसार है।

(A) विभिन्न उप-विषय/विषय-वस्तु यूनिट पर भारण

क्रम संख्या	उप-विषय	अंक
1.	संबंध एवं फलन	10
2.	बीजगणित	13
3.	कलन	44
4.	सदिश एवं त्रिविमीय-ज्यामिति	17
5.	रैखिक प्रोग्रामन	06
6.	प्रायिकता	10
	कुल योग	**100**

(B) प्रश्नों के विभिन्न प्रकार पर भारण

क्रम संख्या	प्रश्न का प्रकार	प्रत्येक प्रश्न पर अंक	प्रश्नों की संख्या	
1.	बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ/ अति लघु उत्तरीय प्रश्न	01	10	10
2.	लघु उत्तरीय प्रश्न	04	12	48
3.	दीर्घ उत्तरीय प्रश्न	06	07	42
		कुल योग	**29**	**100**

(C) चुनाव/विकल्प की योजना

पूरे प्रश्नपत्र में विकल्प का प्रावधान नहीं है। तथापि चार अकों वाले चार प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले दो प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प का प्रावधान है।

ब्लू प्रिंट

यूनिट/प्रश्न का प्रकार	बहु विकल्पी/अति लघु उत्तरीय प्रश्न	लघु उत्तरीय प्रश्न	दीर्घ उत्तरीय	योग
संबंध एवं फलन	-	4 (1)	6 (1)	10 (2)
बीज गणित	3 (3)	4 (1)	6 (1)	13 (5)
कलन	4 (4)	28 (7)	12 (2)	44 (13)
सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	3 (3)	8 (2)	6 (1)	17 (6)
रैखिक प्रोग्रामन	–	–	6 (1)	6 (1)
प्रायिकता	–	4 (1)	6 (1)	10 (2)
योग	**10 (10)**	**48 (12)**	**42 (7)**	**100(29)**

भाग (खंड) — A

प्रश्न संख्या 1 से 3 तक प्रत्येक में दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

1. यदि $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, तो (x, y)

(A) (1, 1) है (B) (1, –1) है (C) (–1, 1) है (D) (–1, –1) है

2. (–2, 4), (2, k) तथा (5, 4) शीर्षों वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है। k का मान है

(A) 4 (B) – 2 (C) 6 (D) – 6

3. रेखा $y = x + 1$, वक्र $y^2 = 4x$ की स्पर्शी बिंदु है

(A) (1, 2) पर (B) (2, 1) पर (C) (1, – 2) पर (D) (–1, 2) पर

4. एक 2×2 आव्यूह की रचना कीजिए, जिसके अवयव a_{ij} निम्नलिखित नियम से प्राप्त होते है,

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left|-3\hat{i} + j\right|}{2}, \text{ यदि } i \neq j \\ (i + j)^2, \text{ यदि } i = j. \end{cases}$$

5. $\tan^{-1}(e^x)$ का x के सापेक्ष बिंदु $x = 0$ पर अवकलज का मान ज्ञात कीजिए

6. किसी रेखा का कार्तीय समीकरण $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{-5} = \dfrac{z-6}{3}$ है। इस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^{83} x + x^{123})\,dx$ का मान निकालिए।

प्रश्न संख्या 8 से 10 तक में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

8. $\int \dfrac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}\,dx =$ ______

9. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\hat{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं, तो $\lambda =$ ______

10. $\vec{a}=\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ का $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}$ के अनुदिश प्रक्षेप ________ है।

खंड — B

11. सिद्ध कीजिए कि $\cot^{-1}\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}=\frac{x}{2},\quad 0<x<\frac{\pi}{2}$

अथवा

समीकरण $\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$, $x > 0$ को x के लिए हल कीजिए।

12. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि,

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

13. $f(x) = |x+1| + |x+2|$ द्वारा प्रदत्त फलन f के $x = -1$ तथा $x = -2$ पर सांतत्य पर परिचर्चा (विचार-विमर्श) कीजिए।

14. यदि $x = 2\cos\theta - \cos2\theta$ तथा $y = 2\sin\theta - \sin2\theta$ है, तो $\theta=\frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1+x)^2}$, जहाँ $-1<x<1$, $x \neq y$

15. किसी शंकु का व्यास 10cm तथा गहराई 10cm है। इसमें 4 cubic cm प्रति मिनट की दर से पानी भरा जा रहा है। उस क्षण जब पानी की गहराई 6cm है, पानी का स्तर किस दर से ऊपर उठ रहा है?

अथवा

उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ द्वारा प्रदत्त फलन f

(i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है

16. $\frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}$ dx का मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\log(\log x)+\frac{1}{\log x)^2}$ dx का ज्ञात कीजिए।

17. ${}_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ का ज्ञात कीजिए।

18. उन सभी वृत्तों का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से हो कर जाते हैं और जिनके केंद्र x- अक्ष पर स्थित हैं।

19. अवकल समीकरण $x^2y\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$ को हल कीजिए।

20. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$ तथा $\vec{b}\neq\vec{c}$, तो सिद्ध कीजिए कि किसी अदिश λ के लिए $\vec{b}=\vec{c}+\lambda\vec{a}$

21. रेखाओं $\vec{r}=(\lambda-1)\hat{i}+(\lambda+1)\hat{j}-(1+\lambda)\hat{k}$ तथा $\vec{r}=(1-\vec{\mu})\hat{i}+(2\vec{\mu}-1)\hat{j}+(\vec{\mu}+2)\hat{k}$ λ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

22. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता खो जाता है। गड्डी तथा शेष पत्तों में से दो पत्ते खींचे जाते हैं, जो पान के पत्ते निकलते हैं इस बार की प्रयिमकता ज्ञात कीजिए कि खोया हुआ पत्ता पान का है।

खण्ड — C

23. मान लीजिए कि दो आव्यूह A तथा B निम्नलिखित हैं।

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \text{ तथा } B=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

सत्यापित कीजिए कि AB = BA = 6I, जहाँ I कोटि 3 का तत्समक आव्यूह है अत: नीचे दिए हुए समीरण निकाय को हल कीजिए।

$x-y=3,\ 2x+3y+4z=17$ और $y+2z=7$

24. समुच्चय **R**– {– 1} में एक द्वि-आधारी संक्रिया निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है, सभी $a, b \in$ **R** – {– 1} के लिए $a * b = a + b + ab$. सिद्ध कीजिए कि **R** – {–1} में $*$ क्रमविनिमेय है। संक्रिया $*$ का तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि इसके अंतर्गत **R** – {– 1}का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है।

25. सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त कर्ण वाले किसी समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम होता है, जब त्रिभुज समद्विबाहु हो।

26. समाकलन विधि का प्रयोग कर के रेखाओं $2x + y = 4,\ 3x - 2y = 6$ तथा $x - 3y + 5 = 0$ के द्वारा घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

अथवा

$\int_1^4 (2x^2 - x)dx$ का मान योगफल की सीमा के रुप में निकालिए।

27. बिन्दु (2, 3, 7) से समतल $3x - y - z = 7$ पर लम्बपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। लंब की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

अथवा

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें रेखाएँ $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ तथा $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu(-\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ अंतर्विष्ट हैं। इस समतल की बिंदु (1,1,1) से दूरी भी ज्ञात कीजिए।

28. ताश के 52 पत्तों की भली-भांति फेंटी हुई एक गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापना किए निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। बंटन का माध्य एंव प्रसरण के भी परिकलन कीजिए।

29. एक आहार विशेषज्ञ दो प्रकार के खाद्य पदार्थों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में 8 इकाई विटामिन A तथा 10 इकाई विटामिन C की हो। खाद्य I में 2 इकाई/किलो विटामिन A तथा 1 इकाई/किलो विटामिन C है। खाद्य II में 1 इकाई/किलो विटामिन A तथा 2 इकाई/किलो विटामिन C है खाद्य I को खरीदने में 50 रु प्रति किलो तथा खाद्य II को खरीदने में 70 रु प्रतिकिलो खर्च होते हैं। इस समस्या के मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात करने के लिए, एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रण कीजिए तथा इसे आलेखीय विधि से हल कीजिए।

अंकन योजना

खंड — A

1. (C)

2. (D)

3. (A) **अंक**

4. $\begin{matrix} 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 16 \end{matrix}$

5. $\frac{1}{2}$

6. $\vec{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(2\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k})$, जहाँ λ एक अदिश है।

7. 0

8. $x + c$

9. $\lambda = -2$

10. $\frac{+1}{7}$ $1 \times 10 = 10$

खंड — B

11. L.H.S. $= \cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}$

$$= \cot^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right\} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \cot^{-1}\frac{\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|-\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \left[\text{क्योंकि } 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}\right]$$

$$= \cot^{-1} \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}$$

$$= \cot^{-1} \frac{2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \cot^{-1} \cot\frac{x}{2} = \frac{x}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\left[\text{since } 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}\right] \qquad 1$$

अथवा

$$\sin^{-1}x + \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}2x = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}x\right) \qquad 1$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos(\sin^{-1}x) - \cos\frac{\pi}{3}\sin(\sin^{-1}x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)} - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x$$

$$4x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - x,\ 5x = \sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 25x^2 = 3(1-x^2)$$

$\Rightarrow \quad 28x^2 = 3$

$\Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{3}{28}$

$\Rightarrow \quad x = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ 1

अतः $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ (क्योंकि दिया हुआ है कि $x > 0$) $\dfrac{1}{2}$

इस प्रकार $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{7}}$ प्रदत्त समीकरण का हल है।

12. मान लीजिए कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के प्रयोग द्वारा

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(p+q+r) & r+p & p+q \\ 2(x+y+z) & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ 1

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ p+q+r & r+p & p+q \\ x+y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$ तथा $C_3 \to C_3 - C_1$ द्वारा

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ p+q+r & -q & -r \\ x+y+z & -y & -z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

$C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ के प्रयोग द्वारा तथा C_2 और C_3 दोनो में (–1) उभयनिष्ठ निकालने पर

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ $1\frac{1}{2}$

13. दशा (स्थिति) 1: जब $x < -2$

$f(x) = |x + 1| + |x + 2| = -(x + 1) - (x+2) = -2x - 3$

दशा 2: जब $-2 \le x < -1$

$f(x) = -x - 1 + x + 2 = 1$ 1

दशा 3: जब $x \ge -1$

$f(x) = x + 1 + x + 2 = 2x + 3$

इस प्रकार

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3 & , \text{ जब } \quad x < -2 \\ 1 & , \text{ जब } \quad -2 \le x < -1 \\ 2x+3 & , \text{ जब } \quad x \ge -1 \end{cases}$$

अब, $x = -2$ पर L.H.S, $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (-2x-3) = 4 - 3 = 1$

अब, $x = -2$ पर R.H.S, $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 1 = 1$

इसके अतिरिक्त $f(-2) = |-2 + 1| + |-2 + 2| = |-1| + |0| = 1$

अतः, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = f(-1) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ फलन f, $x = -2$ पर संतत है।

पुनः $x = -1$ पर L.H.S, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$

$x = -1$ पर R.H.S, $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

$= \lim_{x\to -1^+} (2x+3) = 1$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

साथ ही $f(-1) = |-1 + 1| + |-1 + 2| = 1$

अतः $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^-} = f(-1)$

$\Rightarrow$ फलन $x = -1$ पर सतंत है।

अतः, प्रदत्त फलन दोनो ही बिंदुओं $x = -1$ तथा $x = -2$ पर संतत है।

14. $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$ तथा $y = 2\sin\theta - \sin 2\theta$

इसलिए, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta - \sin\theta} = \dfrac{-2\sin\frac{3\theta}{2}\sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{3\theta}{2}$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{2}\sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{3}{2}\sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2(\sin 2\theta - \sin\theta)} = \frac{3}{4}\sec^2\frac{3\theta}{2} \times \frac{1}{2\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{3}{8}\sec^3\frac{3\theta}{2}\,\text{cosec}\,\frac{\theta}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

इस प्रकार $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{8}\sec^3\frac{3\pi}{4}\,\text{cosec}\,\frac{\pi}{4} = \frac{-3}{2}$ 1

अथवा

$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0, \quad x \neq y$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$x^2(1 + y) = y^2(1 + x)$ 1

$\Rightarrow (x + y)(x - y) = -y\,x\,(x - y)$

$\Rightarrow x + y = -x\,y$, अर्थात्, $y = \frac{-x}{1+x}$ 2

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(1+x).1 - x(0+1)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$ 1

15. मान लीजिए कि OAB एक शंकु है तथा मान लीजिए कि किसी समय t पर पानी का स्तर LM है मान लीजिए कि

ON = h तथा MN = r

दिया हुआ है कि AB = 10 cm, OC = 10 cm तथा

$\frac{dV}{dt} = 4\ cm^3$ minute, जहाँ V शंकु OLM के आयतन को निरूपित करता है।

नोट कीजिए कि $\Delta\ ONM \sim \Delta\ OCB$

$\Rightarrow \frac{MN}{CB} = \frac{ON}{OC}$ या $\frac{r}{5} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$ 1

आकृति 1.1

अब, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .... (i)

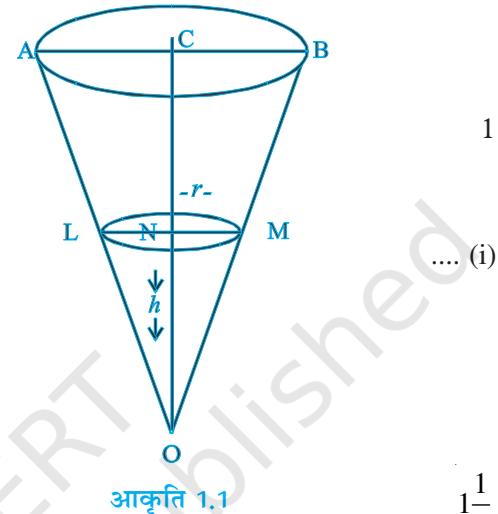
(i) मे $r = \frac{h}{2}$ रखने पर

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$ $1\frac{1}{2}$

t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dv}{dt}$$

इसलिए, जब $h = 6$ cm, $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{9\pi}$ cm/minute $1\frac{1}{2}$

अथवा

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$$

$$= \frac{3\left(x^6-1\right)}{x^4} = \frac{3\left(x^2-1\right)\left(x^4+x^2+1\right)}{x^4}$$ 1

क्योंकि $x^4 + x^2 + 1 > 0$ तथा $x^4 > 0$, इसलिए f के वर्धमान होने के लिए $x^2 - 1 > 0$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$ $1\frac{1}{2}$

अत: f, $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ में वर्धमान है

(ii) f के ह्रासमान होने के लिए, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 1 < 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ [$x \neq 0$ क्योंकि f, $x = 0$ पर परिभाषित नहीं है] $1\frac{1}{2}$

अत: $f(x)$, $(-1, 0) \cup (0, 1)$ में ह्रासमान है।

16. मान लीजिए कि $\frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ 1

तब $3x - 2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+3) + C(x+3)$

x^2, x के गुणांकों तथा अचर पदों की तुलना करने पर, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं,

$A + B = 0$, $2A + 4B + C = 3$ तथा $A + 3B + 3C = -2$

इन समीकरणों को हल करने पर,

$A = \frac{-11}{4}$, $B = \frac{11}{4}$ तथा $C = \frac{-5}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{-11}{4(x+3)} + \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2}$$

अतः, $\int \frac{3x-2}{(x+3)(x+1)^2}\, dx = \frac{-11}{4}\int \frac{1}{x+3}\, dx + \frac{11}{4}\int \frac{1}{x+1}\, dx - \frac{5}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$

$$= \frac{-11}{4}\log|x+3| + \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} + C_1 \qquad 1\frac{1}{2}$$

अथवा

$$\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \quad dx$$

$$= \int \log(\log x)\, dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\, dx$$

log (log$x$) का खंडशः समाकलन करने पर

$$\log(\log x)\, dx = x\log(\log x) - \quad \frac{x}{(\log x)} \times \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\log(\log x) - \quad \frac{1}{\log x}\, dx \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \quad x \quad \frac{-1}{(\log x)^2} \quad \times \frac{1}{x}\, dx \qquad 1$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \quad \frac{1}{(\log x)^2}\, dx$$

इसलिए, $\int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2} \right) dx = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + C \qquad 1\frac{1}{2}$

17. मान लीजिए कि $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx \quad \left[\text{क्योंकि } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\right]$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx - I \qquad 1$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$\cos x = t$ रखिए, $x = \pi \Rightarrow t = -1$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$ तथा $-\sin x\, dx = dt$.

$$\text{इसलिए } 2I = \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \pi \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\tan^{-1}(+1) - \tan^{-1}(-1)\right]$$

$$= +\pi\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi^2}{2} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{\pi^2}{4}$$

18. उस वृत्त का समीकरण, जो मुल बिंदु से हो कर जाए तथा जिसका केन्द्र x – अक्ष पर स्थित हो, निम्नलिखित है,

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots \text{(i)} \qquad 1\frac{1}{2}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2(x-a)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$x \quad y\frac{dy}{dx} \quad a \qquad\qquad 1\frac{1}{2}$$

a का मान (i) में रखने पर

$$y \quad \frac{dy}{dx} \quad ^2 + y^2 = \quad x+y\frac{dy}{dx} \quad ^2$$

$$\left(x^2 \quad y^2\right) \quad 2xy\frac{dy}{dx} \quad 0 \qquad\qquad 1$$

19. दिया हुआ अवकल समीकरण निम्नलिखित है,

$$x^2\, y\, dx - \left(x^3+y^3\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2 y}{x^3+y^3} \qquad ...(1)$$

$y=vx$ रखिए, तो $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ 1

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx^3}{x^3+v^3\, x^3}$$

$$v \quad x\frac{dv}{dx} \quad \frac{v}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} \quad \frac{-v^4}{1+v^3}$$

$$\frac{1+v^3}{v^4}dv \quad - \quad \frac{dx}{x}$$ 1

$$\frac{1}{v^4}dv \quad \frac{1}{v}dv \quad - \quad \frac{dx}{x}$$ 1

$$\frac{-1}{3v^3} \quad \log|v| \quad -\log|x| \quad c$$

$\Rightarrow \frac{-x^3}{3y^3}+\log|y|=c$, जो अभीष्ट समीकरण है 1

20. दिया हुआ है कि,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$$

$$\vec{a} \quad \vec{b}-\vec{a} \quad \vec{c} \quad \vec{0}$$

$$\vec{a} \quad \left(\vec{b}-\vec{c}\right) \quad \vec{0}$$ 1

$\Rightarrow \vec{a}=\vec{0}$ या $\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$ या $\vec{a}\,||\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$ 1

$\Rightarrow \vec{a}\,||\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$ [क्योंकि $\vec{a}\neq\vec{0}$ तथा $\vec{b}\neq\vec{c}$] 1

$\vec{b}-\vec{c} \quad \vec{a}$, किसी अदिश λ के लिए

$\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}+\lambda\vec{a}$ 1

21. हमें ज्ञात है कि रेखाओं $\vec{r}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ तथा $\vec{r}=\vec{c}+\mu\vec{d}$ के बीच की न्यूनतम दूरी निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है,

$$D=\left|\frac{(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)}{\left|\vec{b}\times\vec{d}\right|}\right|$$ 1

अब दिए हुए समीकरणों को निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है,

$$\vec{r} = \left(-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) + \lambda \left(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) \text{ तथा } r = \left(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) + \mu \left(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)$$

इसलिए, $\vec{c} - \vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\frac{1}{2}$

तथा $\vec{b} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 0.\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\left|\vec{b} \quad \vec{d}\right| \quad \sqrt{9 \quad 9} \quad \sqrt{18} \quad 3\sqrt{2}$$ $\frac{1}{2}$

अतः $D = \left|\frac{(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})}{\left|\vec{b} \times \vec{d}\right|}\right| = \left|\frac{6 - 0 + 9}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{15}{3\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. 2

22. मान लीजिए कि E, E_2, E_3, E_4 तथा A निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित घटनाएँ हैं:

E_1 = खोया हुआ पत्ता पान का है,

E_2 = खोया हुआ पत्ता हुकुम का है,

E_3 = खोया हुआ पत्ता चिड़ी का है,

E_4 = खोया हुआ पत्ता ईंट का है, $\frac{1}{2}$

A = शेष पत्तों में से खीचे गए दो पत्तों का पान का होना

इस प्रकार $P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, P(E_3) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, P(E_4) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$

$P(A/E_1)$ = पान के दो पत्तों के खींचे जाने की प्रायिकता, जब कि दिया हुआ है कि पान एक पत्ता खो गया है $= \frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}$

$P(A/E_2)$ = पान के दो पत्तों के खींचे जाने की प्रायिकता, जब कि दिया हुआ है कि हुकुम का एक पत्ता खो गया है $= \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$

इसी प्रकार, $P(A/E_3) = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ तथा $P(A/E_4) = \frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}$ 1

बेज़-प्रमेय द्वारा,

अभीष्ट प्रायिकता $= P(E_1/A)$

$$= \frac{P(E_1)\,P(A/E_1)}{P(E_1)\,P(A/E_1)+P(E_2)\,P(A/E_2)+P(E_3)\,P(A/E_3)+P(E_4)\,P(A/E_4)}$$ 1

$$= \frac{\frac{1}{4}\frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}}{\frac{1}{4}\times\frac{^{12}C_2}{^{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}+\frac{1}{4}\frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}+\frac{1}{4}\times\frac{^{13}C_2}{^{51}C_2}}$$ 1

$$= \frac{^{12}C_2}{^{12}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2+{}^{13}C_2} = \frac{66}{66+78+78+78} = \frac{11}{50}$$

खंड - C

23. यहाँ

$$AB = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{matrix}$$ 1

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 6I$$

इसी प्रकार $BA = 6I$, अतः $AB = 6I = BA$

क्योंकि $AB = 6I$, $A^{-1}(AB) = 6A^{-1}I$ इससे प्राप्त होता है कि 1

$IB = 6A^{-1}$, अर्थात् , $A^{-1} = \frac{1}{6}B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $1\frac{1}{2}$

प्रदत्त समीकरण निकाय निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है,

$AX = C$, जहाँ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$

प्रदत्त निकाय $AX = C$ का हल $X = A^{-1}C$ से प्राप्त होता है $\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6+34-28 \\ -12+34-28 \\ 6-17+34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अतः $x = 2, y = 1$ and $z = 4$ 2

24. **क्रमविनिमेय :** किसी $a, b \in \mathbf{R} - \{-1\}$ के लिए, ज्ञात है कि $a * b = a + b + ab$ तथा $b * a = b + a + ba$. परन्तु $\mathbf{R} - \{-1\}$ में योग तथा गुणन कि क्रियाएँ क्रमविनिमेय होती हैं। अत:

$$a + b + ab = b + a + ba .$$

$$a * b = b * a$$

अत: $\mathbf{R} - \{-1\}$ में $*$ क्रमविनिमेय है। 2

तत्समक अवयव : मान लीजिए कि e तत्समक अवयव है। इसलिए सभी $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ के लिए $a * e = e * a$

$$a + e + ae = a \text{ तथा } e + a + ea = a$$

$$e\,(1+a) = 0 \qquad e = 0 \text{ [क्योंकि } a \neq -1)$$

अत: $\mathbf{R} - \{-1\}$ में परिभाषित $*$ का तत्समक अवयव 0 है। 2

प्रतिलोम : मान लीजिए कि $a \in \mathbf{R} - \{-1\}$ तथा मान लीजिए कि a का प्रतिलोम b है, तो

$a * b = e = b * a$

$$a * b = 0 = b * a \quad (\because e = 0)$$

$$a + b + ab = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{-a}{a+1} \in \mathbf{R} \left(\text{क्योंकि } \; a \neq -1\right)$$ 2

इसके अतिरिक्त, $\dfrac{-a}{a+1} \neq -1$. अत: $b = \dfrac{-a}{a+1} \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

अत: $\mathbf{R} - \{-1\}$ का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय है तथा किसी अवयव a का प्रतिलोम $\dfrac{-a}{a+1}$ है।

25. मान लीजिए कि समकोण त्रिभुज ABC के कर्ण AC की लम्बाई H है तथा कर्ण और आधार BC के बीच का कोण θ है।

इस प्रकार BC = आधार = $H\cos\theta$ तथा AC = लम्ब = $H\sin\theta$

P = समकोण त्रिभुज का परिमाप = $H + H\cos\theta + H\sin\theta$ परिमाप के अधिकतम अथवा न्यूनतम होने के लिए

आकृति 1.2

$$\frac{dP}{d\theta}=0$$

$H(0-\sin\theta+\cos\theta)=0$, अर्थात्, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 1

अब, $\frac{d^2P}{d\theta^2}=-H\cos\theta-H\sin\theta$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{d^2P}{d\theta^2}$ at $\theta=\frac{\pi}{4}=-H\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]=-\sqrt{2}H<0$ 1

अत: $\theta=\frac{\pi}{4}$ पर P अधिकतम है।

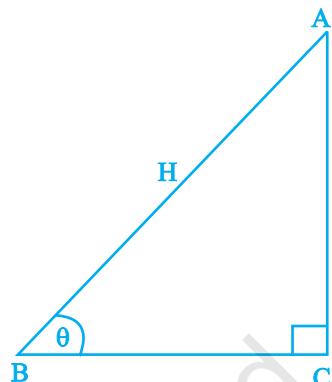
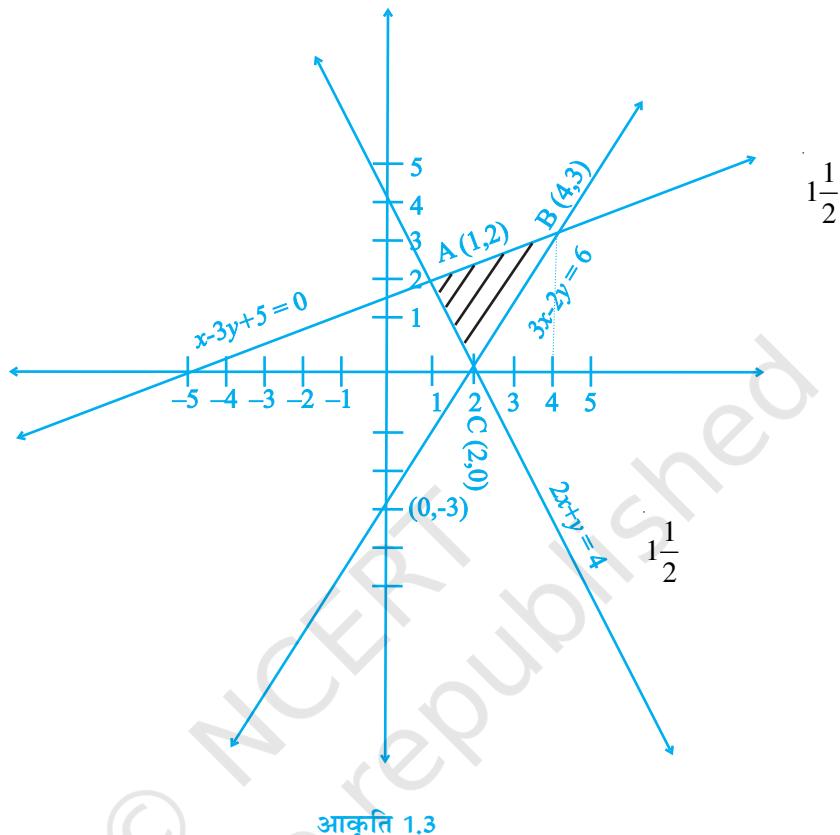
$\theta=\frac{\pi}{4}$ के लिए, आधार $=H\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{H}{\sqrt{2}}$ तथा लम्ब = $\frac{H}{\sqrt{2}}$ 1

अत: समकोण त्रिभुज का परिमाप अधिकतम है जब त्रिभुज समद्विबाहु है।

26.

$1\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}$

आकृति 1.3

प्रदत्त रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदुओं को ज्ञात करने पर हमें A(1,2), B(4,3) तथा C (2,0) प्राप्त होता है 1

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_1^4 \frac{x+5}{3}\, dx - \int_1^2 (4-2x)\, dx - \int_2^4 \frac{3x-6}{2}\, dx$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big]_1^4 - \left(4x-x^2\right)\Big]_1^2 - \left(\frac{3}{4}x^2-3x\right)\Big]_2^4 \qquad 2\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{16}{2}+20\right) - \left(\frac{1}{2}+5\right)\right] - \left[(8-4)-(4-1)\right] - \left[(12-12)-(3-6)\right]$$

$= \frac{1}{3} \times \frac{45}{2} - 1 - 3 = \frac{7}{2}$ वर्ग इकाई 1

अथवा

$$I = \int_1^4 \left(2x^2 - x\right) dx = \int_1^4 f(x)\, dx$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[f(1) + f(1+h) + f(1+2h) + \ldots\ldots + f\left(1+(n-1)h\right) \right] \quad ---(i)$$ 1

जहाँ $h = \frac{4-1}{n}$, अर्थात् , $nh = 3$

अब, $f\left(1+\overline{n-1}h\right) = 2\left(1+(n-1)h\right)^2 - \left(1+(n-1)h\right)$

$x - 3y + 50$

$x = -5,\ x = 0$

$y = 0,\ y = \frac{5}{3} = 16$

$$= 2\left(1+(n-1)^2 h^2 + 2(n-1)h\right) - 1\ (1 + (n-1)\ h) = 2(n-1)^2 h^2 + 3(n-1)h + 1$$

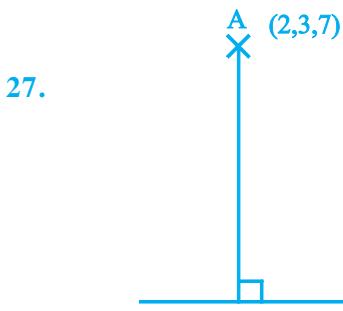
इसलिए, $f(1) = 2.0^2 h^2 + 3.0.h + 1$, $f(1+h) = 2.1^2 h^2 + 3.1.h + 1$

$f(1+2h) = 2.2^2 h^2 + 3.2.h + 1, \ldots\ f\left(1+(n-1)h\right) = 2.(n-1)^2 h^2 + 3.(n-1).h + 1$ $1\frac{1}{2}$

अतः, $I = \lim_{h \to 0} h \left[n + 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} h^2 + \frac{3n(nh-h)}{2} \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \left[hn + \frac{2(nh)(nh-h)(2nh-h)}{6} + \frac{3(nh)(nh-h)}{2} \right]$$ 2

$$= \lim_{h \to 0} \left[3 + \frac{2(3)(3-h)(6-h)}{6} + \frac{3(3)(3-n)}{2} \right] = \frac{69}{2}$$ $1\frac{1}{2}$

27.

आकृति 1.4

दिए हुए समतल पर लम्ब रेखा AB का समीकरण

$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-7}{-1}=\lambda$ (मान लिया) है $\quad 1\frac{1}{2}$

इसलिए बिन्दु A से समतल $3x-y-z=7$ पर खींचे गए लम्ब के पाद B के निर्देशांक निम्नलिखित हैं

$(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7) \quad 1\frac{1}{2}$

क्योंकि B $=(3\lambda+2, -\lambda+3, -\lambda+7)$ समतल $3x-y-z=7$ पर स्थित है, इसलिए

$= 3(3\lambda+2)-(-\lambda+3)-(-\lambda+7)=7 \quad 1$

अतः B = (5, 2, 6) हैं तथा AB दूरी = लम्ब की लम्बाई $\quad 2$

$\sqrt{(2-5)^2+(3-2)^2+(7-6)^2} = \sqrt{11}$ इकाई है

अतः लंबपाद के निर्देशांक (5, 2, 6) हैं तथा लंब की लम्बाई = $\sqrt{11}$ $\quad 1$

अथवा

प्रदत्त रेखाएँ निम्नलिखित हैं।

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\left(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)$ --------- *(i)*

तथा $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \mu\left(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}\right)$ ---------*(ii)*

नोट कीजिए कि रेखा *(i)* बिन्दु (1, 1, 0) से हो कर जाती है तथा उसके $\frac{1}{2}$

दिक्–अनुपात 1, 2, –1 हैं तथा रेखा (ii) बिन्दु (1, 1, 0) से हो कर जाती है तथा उसके

दिक्–अनुपात – 1, 1, –2 हैं $\frac{1}{2}$

क्योंकि अभीष्ट समतल में रेखाएँ (i) तथा (ii) अंतर्विष्ट हैं, इसलिए समतल निम्नलिखि सदिशों के समान्तर है,

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

इसलिए अभीष्ट समतल सदिश $\vec{b} \times \vec{c}$ पर लम्ब है तथा 1

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$ 1

अतः अभीष्ट समतल का समीकरण निम्नलिखित है,

$$\left(\vec{r} - \vec{a}\right).\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 0$$ 1

$$\vec{r} - \left(\hat{i} \quad \hat{j}\right) . \left(\quad 3\vec{i} \quad 3\vec{j} \quad 3\vec{k}\right) \quad 0$$

$$\vec{r}.\left(-\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\right) \quad 0$$

तथा इसका कार्तीय–रूप $-x + y + z = 0$ है 2

समतल की बिन्दु (1, 1, 1) से दूरी

$$\frac{|1(-1)+1.1+1.1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ इकाई है।

28. मान लीजिए कि x, दो पत्तों के निकाले (खींचे) जाने पर, बादशाह की संख्या निरूपित करता है। नोट कीजिए कि x एक यादृच्छिक चर है, जिसका मान 0, 1, 2 हो सकता है। अब

$$P(x=0)=P(\text{एक भी बादशाह नहीं}) = \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times47}{52\times51} = \frac{188}{221}$$ 1

P (x = 1) = P (एक बादशाह तथा एक बादशाह से इतर)

$$= \frac{^4C_1 \times 48C_1}{^{52}C_2} = \frac{4\times48\times2}{52\times51} = \frac{32}{221}$$ 1

$$P(x=2) = P(\text{दोनों बादशाह}) = \frac{^4C_2}{^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51} = \frac{1}{221}$$ 1

अतः x का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है:

x	0	1	2
P (x)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

1

अब x का माध्य $= E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$

$$= 0\times\frac{188}{221} + 1\times\frac{32}{221} + \frac{2\times1}{221} = \frac{34}{221}$$

साथ ही $\quad E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) \quad = 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$

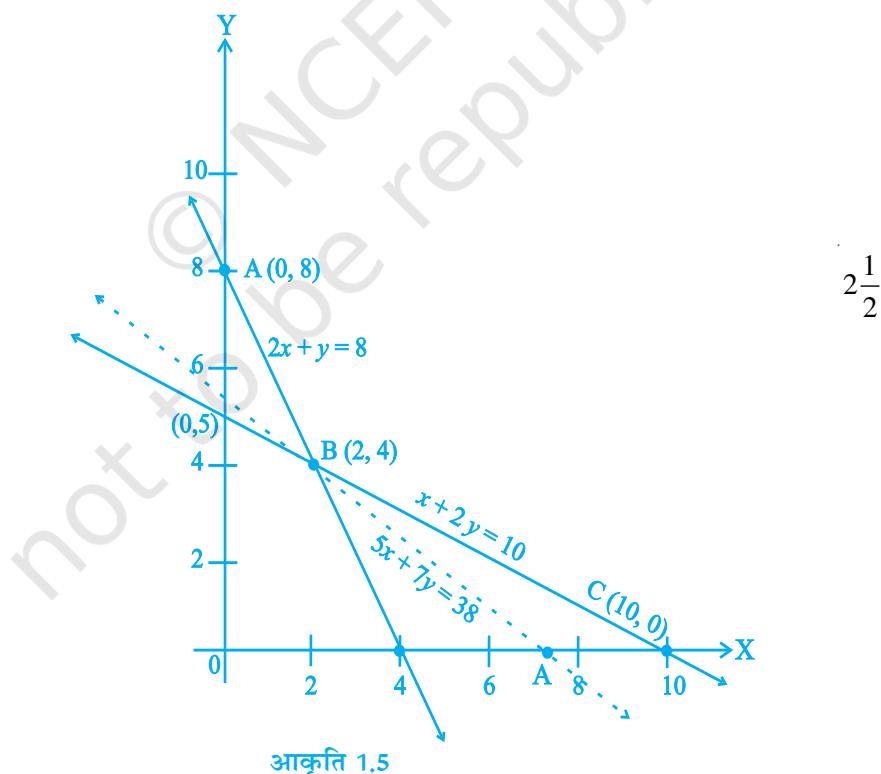
अब $\quad \text{var}(x) = \text{E}(x^2) - [\text{E}(x)^2] \quad = \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$ 1

इसलिए मानक विचलन $\sqrt{\text{var}(x)} \quad = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$ 1

29. मान लीजिए कि मिश्रण में x kg खाद्य I तथा y kg खाद्य II है

अत: हमें व्यवरोधों $2x + y \geq 8$, $x + 2y \geq 10$, $x, y \geq 0$ के अंतर्गत $Z = 50x + 70y$ का न्यूनतमीकरण करना है 2

$2\frac{1}{2}$

आकृति 1.5

उपर्युक्त असमिकाओं द्वारा निर्धारित सुसंगत क्षेत्र एक अपरिबद्ध क्षेत्र है। सुसंगत क्षेत्र शीर्ष (कोनीय बिन्दु) निम्नलिखित हैं:

$$A\ (0, 8)\ B\ (2, 4)\ C(10, 0) \qquad \frac{1}{2}$$

अब Z के मान, $A\ (0, 8)$ पर $= 50\times0+70\times8=560$

$B(2, 4)$ पर $=380$ तथा $C(10, 0)$ पर $=500$ हैं।

क्योंकि सुसंगत क्षेत्र अपरिबद्ध है इसलिए हमें $50x + 70y < 380$ अर्थात्, $5x + 7y < 38$ का आलेख खींचना पड़ेगा।

क्योंकि परिणामी खुले अर्धतल तथा सुंसगत क्षेत्र में कोई बिन्दु उभयनिष्ठ नहीं है, अत: Z का न्यूनतम मान = B (2, 4) पर 380. अत: मिश्रण का मूल्य न्यूनतम, अर्थात् 380 रूप रखने के लिए, आहार विशेषज्ञ द्वारा इष्टतम मिश्रण योजना (युक्ति) यह होगी कि वह 2 kg खाद्य I तथा 4 kg खाद्य II का मिश्रण बनाए। 1